

kräfte an Zentren aufgefaßt. Ihr Mitschwingungsvermögen mit dem elektrischen Vektor der einfallenden Lichtwelle wird nur von ihrer Masse bestimmt. Die kurzwellige Grenze der Reflexion liegt bei

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi m c^2}{ne^2}} [\text{cm}].$$

Für eine aus Tafel 1 entnommene Elektronenkonzentration von  $10^{21}$  pro  $\text{cm}^3$ , ergibt sich diese Grenze, wenn man die Ruhemasse  $m$  der Elektronen einsetzt, zu  $1,3 \mu$ , die gemessenen Werte, ebenfalls in Tab. 1 enthalten, zeigen gute Übereinstimmung mit den berechneten. Die kurzwellige Absorptionskante liegt also im nahen Ultraroten. Das ist plausibel, denn die Schichten aus  $\text{SnO}_2$  mit 1,5% Sb-Zusatz zeigen bei größerer Dicke einen bläu-

lichen Schimmer. Steigert man den Antimon-Zusatz (größere Elektronenkonzentration), dann werden sie tiefblau und bei 4% Zusatz erscheinen sie blauschwarz. Setzt man einer  $\text{SnCl}_4$ -Lösung mit hohem  $\text{SbCl}_3$ -Gehalt, welche blaue Schichten ergeben würde, einige Prozent eines niederwertigen Chlorids zu, etwa  $\text{AlCl}_3$  oder  $\text{MnCl}_2$ , und sprüht sie dann auf das erhitzte Glas auf, so werden die Schichten im Einklang mit den entwickelten Vorstellungen wieder farblos.

Für die Ermöglichung und Förderung dieser Arbeit bin ich Herrn Prof. Dr. W. Hanle, für Überlassung von Apparaten der Forschungsgemeinschaft zu vielem Dank verpflichtet. Die Messungen der Ultrarotabsorption wurden von der Firma Ernst Leitz GmbH., Wetzlar, freundlicherweise durchgeführt.

## Die Strahlungsverluste bei der inneren Umwandlung

Von K. BAUMANN und H. ROBL

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Wien

(Z. Naturforsch. 9a, 511—515 [1954]; eingegangen am 10. April 1954)

Die innere Bremsstrahlung von Konversionselektronen, die Brown und Stump bereits experimentell untersucht haben, wird theoretisch behandelt. Unter Beschränkung auf K-Elektronen wird eine Näherung für kleine Kernladungszahlen verwendet. Die differentielle Übergangswahrscheinlichkeit wird sowohl für magnetische, als auch für elektrische Multipolübergänge beliebiger Ordnung angegeben. Es wird gezeigt, daß die Energie- und Winkelverteilung energiereicher Lichtquanten von der nur für kleine Strahlungsverluste gültigen Formel von Chang und Falkoff abweicht. Sie weist bei kleinen Kernladungszahlen ausgeprägte Maxima auf.

Für die Wahrscheinlichkeit der Abstrahlung eines Photons der Energie  $k$  durch ein Elektron beim Übergang vom Energieimpulsvektor  $g_\mu$  auf  $p_\mu$  ergibt sich im Limes  $k \rightarrow 0$  durch Spezialisierung einer allgemeinen Formel<sup>1</sup>

$$d\Phi = \omega d\Omega_p \frac{\alpha}{4\pi^2} \sum_\mu \left( \frac{g_\mu}{g_\lambda k^\lambda} - \frac{p_\mu}{p_\lambda k^\lambda} \right)^2 k dk d\Omega_k, \quad (1)$$

wobei  $\omega d\Omega_p$  die Wahrscheinlichkeit für den Prozeß ohne Photon bedeutet, und  $a_\lambda b^\lambda = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ;  $\mu$  ist über die beiden Polarisationsrichtungen zu summieren.

Wenn das Elektron im Anfangszustand ruht, ergibt (1) sofort

$$d\Phi = w \frac{\alpha}{2\pi k} \frac{p^2 \sin^2 \Theta}{(E - p \cos \Theta)^2} \sin \Theta d\Theta dk, \quad (2)$$

<sup>1</sup> J. Schwinger, Phys. Rev. 76, 790 [1949]; L. M. Brown u. R. P. Feynman, Phys. Rev. 85, 231 [1952]; K. Baumann, Acta Phys. Austriaca 7, 248 [1953].

einen schon von Chang und Falkoff<sup>2</sup> auf halbklassischem Wege gewonnenen Ausdruck. In (2) wurde  $E$  für  $p_0$  geschrieben,  $\Theta$  ist der Winkel zwischen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{k}$  und  $w = \int \omega d\Omega_p$ . Hier und im folgenden ist  $\hbar = c = m = 1$  gesetzt, außerdem verwenden wir Heavisidesche Einheiten.

Brown und Stump<sup>3</sup> untersuchten die innere Bremsstrahlung, die bei der inneren Umwandlung in  $\text{Ba}^{137}$  auftritt. Sie fanden in ihrem Meßbereich eine im wesentlichen isotrope Winkelverteilung, im Gegensatz zu der starken Anisotropie in (2). Es bleibt nun zu untersuchen, wie weit (2) durch eine strengere Rechnung verändert wird.

Wir beschreiben den Zwischen- und Endzustand des Elektrons näherungsweise durch ebene Wellen und verwenden für seinen Anfangszustand in der

<sup>2</sup> C. S. W. Chang u. D. L. Falkoff, Phys. Rev. 76, 365 [1949].

<sup>3</sup> H. B. Brown u. R. Stump, Phys. Rev. 90, 1061 [1953].



K-Schale die Wellenfunktion  $u_0(\pi a^3)^{-1/2} \exp(r/a)$ , wobei  $a = (Z\alpha)^{-1}$  mit  $\alpha = 1/137$  und  $u_0$  die Spinoramplitude für den Impuls 0 bedeutet. Die Bindungsenergie wird vernachlässigt. Damit wird das Übergangsmatrixelement<sup>4</sup> für die Emission eines in der Richtung  $\mu$  polarisierten Photons  $u_\mu^* M_\mu u_0$  mit

$$M_\mu = \int d^3 \mathbf{g} \chi(\mathbf{g}) \left\{ \frac{1}{2p_\lambda k^\lambda} (2p_\mu + \gamma_\mu k_\nu \gamma^\nu) a_\varrho \gamma^\varrho \right. \quad (3) \\ \left. + \frac{a_\varrho \gamma^\varrho}{\mathbf{g} \cdot (2\mathbf{k} - \mathbf{g}) - 2k} (2\delta_{0\mu} - 2k_\nu \gamma^\nu \gamma_\mu - \mathbf{g} \cdot \vec{\gamma} \cdot \gamma_\mu) \right\} \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Hierbei ist

$$\chi(\mathbf{g}) = (\pi a^3)^{-1/2} (2\pi)^{-3} \int d^3 \mathbf{r} e^{-r/a} e^{-i \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4)$$

$$a_\varrho = \int d^3 \mathbf{r} A_\varrho(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{r}}; \quad (5)$$

$A_\varrho$  ist das Viererpotential des Kernmultipols. Schließlich ist  $\gamma_0 = \beta$ ,  $\vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha}$ .

Gl. (2) stellt auch für den Fall eines anfangs gebundenen Elektrons den korrekten Limes  $k \rightarrow 0$  dar. Denn nur der erste Term von (3), der offensichtlich auf (2) führt, wird mit  $k \rightarrow 0$  unendlich.

Die Ausdehnung des Elektrons ist im Koordinatenraum von der Größenordnung  $137/Z$  in natürlichen Einheiten, also  $Z/137$  im  $\mathbf{g}$ -Raum, wie man auch aus Gl. (4) sieht. Für  $p, k \gg Z/137$  kann man daher in der geschlungenen Klammer in (3)  $\mathbf{g}$  gleich Null setzen, weil die Funktionen sich in dem in Frage kommenden  $\mathbf{g}$ -Raumgebiet nur langsam ändern. Eine Ausnahme bildet die Fourier-Transformierte  $a_\varrho$  von  $A_\varrho(r)$ , die für gewisse Wertepaare  $p, k$  gerade an der Stelle  $\mathbf{g} = 0$  unendlich wird. Wir lassen also die  $\mathbf{g}$ -Abhängigkeit nur in  $\chi(\mathbf{g})$  und  $a_\varrho$  stehen und bekommen damit formal die Streuung eines freien, ruhenden Elektrons, normiert im Volumen  $\pi a^3$ , an einem modifizierten Multipolpotential  $a_\varrho$ , wobei ein Bremsquant ermittelt wird:

$$d\Phi = -\frac{\alpha^2}{8\pi^4} (Z\alpha)^3 p k d\Omega_k d\Omega_p \quad (6) \\ \cdot \frac{1}{4} \text{Sp} (p_\lambda \gamma^\lambda + 1) (P^\mu + Q^\mu) (\beta + 1) (P_\mu^* + Q_\mu^*)$$

mit

$$P_\mu = \frac{1}{2\varrho_\lambda k^\lambda} (2p_\mu + \gamma_\mu k_\nu \gamma^\nu) \hat{a}_\varrho \gamma^\varrho, \quad (7)$$

$$Q_\mu = -\frac{1}{2k} \hat{a}_\varrho \gamma^\varrho (2\delta_{0\mu} - k_\nu \gamma^\nu \gamma_\mu), \quad (8)$$

$$\hat{a}_\varrho = \int d^3 \mathbf{g} \chi(\mathbf{g}) a_\varrho. \quad (9)$$

<sup>4</sup> Die simultane Emission zweier  $\gamma$ -Quanten durch den Kern, von denen eines umgewandelt wird, vernachlässigen wir, da das entsprechende Matrixelement ein zusätzliches Übergangselement des Nukleonen-

Die Rechnung ergibt

$$-\frac{1}{4} \text{Sp} (p_\lambda \gamma^\lambda + 1) (P^\mu + Q^\mu) (\beta + 1) (P_\mu^* + Q_\mu^*) \\ = \frac{p^2 \sin^2 \Theta}{k^2 A^2} [(E + 1) t_0 + (E - 1) t_1 - (t_p + t_p^*)] \\ + \frac{1}{k A^2} \left[ -t_0 - t_1 + \frac{1}{k} (t_k + t_k^*) \right. \\ + \frac{1}{k A} \left[ (2E - k - 1) t_0 + \frac{1}{k} (E^2 - E + k) (t_k + t_k^*) \right. \\ - (E + 1) (t_p + t_p^*) + (2E + k + 1) t_1 \\ - \frac{E}{k} (t_{pk} + t_{pk}^*) + 2t_{pp} - \frac{2}{k} t_{kk} \left. \right] \\ - \frac{1}{k} \left[ \{(1 + k) (E + p \cos \Theta) - 1\} t_0 \right. \\ \left. - \frac{E}{k} (1 + k) (t_k + t_k^*) \right] \\ - k (t_p + t_p^*) + \{(1 + k) A - 2E - 1\} t_1 \\ \left. + \frac{1}{k} (1 + k) (t_{pk} + t_{pk}^*) \right], \quad (10)$$

worin  $E - p \cos \Theta = A$  gesetzt wurde und

$$t_0 = \hat{a}_0 \hat{a}_0^*, \quad t_1 = \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^*, \quad t_p = \hat{a}_0^* \hat{\mathbf{a}} \mathbf{p}, \quad t_{pk} = (\hat{\mathbf{a}} \mathbf{p})(\hat{\mathbf{a}} \mathbf{k}). \quad (11)$$

Bedeutet  $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{k}$ ,  $\omega_p$  den Winkel zwischen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ ,  $\omega_k$  jenen zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{q}$ , so gilt

$$d\Omega_k = \frac{\sin \Theta}{\sin \omega_p} \frac{d\Theta}{d\omega_p} d\Omega_q;$$

weiterhin, wenn  $\delta$  den Winkel zwischen den Ebenen  $(\mathbf{q}, \mathbf{z})$  und  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  bedeutet,

$$d\Omega_p = \sin \omega_p d\delta d\omega_p.$$

Also wird in (6)

$$d\Omega_k d\Omega_p = d\Omega_q d\delta \sin \Theta d\Theta. \quad (12)$$

Nach Rose<sup>5</sup> lauten die Multipolpotentiale, wenn wir den Zeitfaktor  $\exp(-i\omega t)$  unterdrücken und Heavisidesche Einheiten verwenden, im magnetischen Fall

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{2}{l(l+1)} \right)^{1/2} h_l(zr) i\mathbf{r} \times \mathbf{grad} Y_l^m, \\ A_0(\mathbf{r}) = 0; \quad (13)$$

im elektrischen Fall

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2}{l(l+1)} \right)^{1/2} h_{l-1}(zr) \left( r \mathbf{grad} + l \frac{\mathbf{r}}{r} \right) Y_l^m, \\ A_0(\mathbf{r}) = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{2l}{l+1} \right)^{1/2} h_l(zr) Y_l^m, \quad (14)$$

viererstromes statt des Elektronenstromes enthält und daher vergleichsweise als klein angenommen werden kann.

<sup>5</sup> M. E. Rose, Phys. Rev. **76**, 678 [1949].

wobei

$$h_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(x).$$

$H^{(1)}$  sind die Hankel-Funktionen erster Art. Diese Potentiale entsprechen der Emission von  $(\pi^2 \zeta)^{-1}$  Photonen der Energie  $\zeta$  in der Zeiteinheit. Unter Verwendung der Beziehung

$$e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l,m} i^{-l} j_l(q'r) Y_l^{m*}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_l^m(\vartheta', \varphi'),$$

wobei  $\vartheta', \varphi'$  die Polarkoordinaten von  $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \mathbf{g}$ ,  $\vartheta_r, \varphi_r$  jene von  $\mathbf{r}$  sind, ergibt sich für (5)

$$\mathbf{a} = i^{-l} \left( \frac{8}{l(l+1)} \right)^{1/2} J_l \begin{cases} \frac{1}{2} (\mu_+ Y_l^{m+1} + \mu_- Y_l^{m-1}) \\ -\frac{i}{2} (\mu_+ Y_l^{m+1} - \mu_- Y_l^{m-1}) \\ \mu Y_l^m \end{cases} \quad (15)$$

im magnetischen und

$$\mathbf{a} = i^{-l+1} \left( \frac{8}{l(l+1)} \right)^{1/2} J_{l-1} \begin{cases} \frac{1}{2} (\eta_+ Y_{l-1}^{m+1} - \eta_- Y_{l-1}^{m-1}) \\ -\frac{i}{2} (\eta_+ Y_{l-1}^{m+1} + \eta_- Y_{l-1}^{m-1}) \\ \eta Y_{l-1}^m \end{cases} \quad (16)$$

$$a_0 = i^{-l+1} \left( \frac{8l}{l+1} \right)^{1/2} J_l Y_l^m \quad (17)$$

im elektrischen Fall, wobei

$$\begin{aligned} J_l &= \int h_l(\zeta r) j_l(q'r) r^2 dr \\ &= \frac{i}{\zeta^{l+1}} \frac{q'^l}{q'^2 - \zeta^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mu_{\pm} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}, \mu = m,$$

$$\eta_{\pm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l \mp m)(l \mp m - 1)}{2l-1}},$$

$$\eta = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)(l+m)}{2l-1}}, \quad (19)$$

Entsprechend dem Übergang von Gl. (3) zu Gl. (6) ersetzen wir in dem Integral (9)  $q'^l$  von (18) durch  $q^l$  und die Argumente  $\vartheta', \varphi'$  der Kugelfunktionen  $Y$  durch die Polarkoordinaten  $\vartheta, \varphi$  von  $\mathbf{q}$ . Dies bedeutet, daß abgesehen von dem Nenner in (18), der verschwinden kann,  $\mathbf{g} = 0$  gesetzt wird. Mit der Abkürzung

$$U = \int d^3\mathbf{g} \frac{1}{(\mathbf{q} - \mathbf{g})^2 - \zeta^2} \cdot (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{r} e^{-r/a} e^{-i\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}}$$

erhält man mit  $a^{-1} = Z\alpha$

$$U^*U = \frac{1}{(q^2 - \zeta^2)^2 + 2(Z\alpha)^2 (q^2 + \zeta^2) + (Z\alpha)^4}. \quad (20)$$

Aus  $t_p, t_{pp}$  und  $t_{pk}$  lassen sich die Polarkoordinaten von  $\mathbf{p}$  mittels der Formeln

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_p e^{\pm i\varphi_p} &= e^{\pm i\varphi} (\cos \omega_p \sin \vartheta \\ &\quad - \sin \omega_p (\cos \vartheta \cos \delta \mp i \sin \omega_p \sin \delta)) \end{aligned} \quad (21)$$

eliminieren. Entsprechende Formeln gelten für die Polarkoordinaten von  $\mathbf{k}$ . Nunmehr kann man die Integration über  $\delta, \vartheta$  und  $\varphi$  ausführen und erhält<sup>6</sup>

$$\int d\delta d\vartheta d\varphi q_i t_i = 16\pi J_l^* J_l K_i;$$

$$K_0 = \begin{cases} 0 \\ \frac{l}{l+1} \end{cases} \quad (22a)$$

$$K_1 = \begin{cases} 1 \\ \left(\frac{\zeta}{q}\right)^2 \frac{2l+1}{l+1} \end{cases} \quad (22b)$$

$$K_p = \begin{cases} 0 \\ \frac{\zeta}{q} \frac{l}{l+1} p \left[ 1 - \left(\frac{k}{q}\right)^2 \sin^2 \Theta \right]^{1/2} \end{cases} \quad (22c)$$

$$K_{pp} = \begin{cases} \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{p}{q}\right) \sin^2 \Theta; \\ \left(\frac{\zeta}{q}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{l+1} \left[ 2lp^2 - (l-1)k^2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sin^2 \Theta \right] \end{cases} \quad (22d)$$

$$K_{pk} = \begin{cases} -\frac{1}{2} k^2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sin^2 \Theta; \\ \left(\frac{\zeta}{q}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{l+1} \left[ 2lpk \cos \Theta + (l-1)k^2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sin^2 \Theta \right]. \end{cases} \quad (22e)$$

Der erste Wert gilt jeweils für den magnetischen, der zweite für den elektrischen Fall. Einsetzen von (12) und (22) in (6) und Multiplizieren mit  $\pi^2 \zeta$  liefert das Endergebnis; für magnetische Übergänge:

$$d\Phi =$$

$$\begin{aligned} &\frac{2\alpha^2}{\pi} (Z\alpha)^3 \frac{p}{\zeta} \left(\frac{q}{\zeta}\right)^{2l} \frac{1}{(q^2 - \zeta^2)^2 + 2(Z\alpha)^2 (q^2 + \zeta^2) + (Z\alpha)^4} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{(E - p \cos \Theta)^2} \left[ \frac{1}{k} (\zeta - k) p^2 \sin^2 \Theta - 1 \right] \right. \\ &+ \frac{1}{E - p \cos \Theta} \left[ 2E + 1 + k + k\zeta \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sin^2 \Theta \right] \\ &- (2E + 1) + (1 + k)(E - p \cos \Theta) \\ &\left. - k(1 + k) \left(\frac{p}{q}\right)^2 \sin^2 \Theta \right\} \sin \Theta d\Theta d\vartheta dk; \end{aligned} \quad (23)$$

feldes etwa  $\mathbf{q}$  wählt und die Winkelintegration durch eine Summation über alle  $m$  ersetzt.

<sup>6</sup> Man gelangt zu den gleichen Ergebnissen, wenn man für die ausgezeichnete Richtung des Multipol-

für elektrische Übergänge:

$$\begin{aligned}
 d\Phi = & \frac{2\alpha^2}{\pi} (Z\alpha)^3 \frac{p}{\varkappa} \left( \frac{q}{\varkappa} \right)^{2l} \frac{1}{(q^2 - \varkappa^2)^2 + 2(Z\alpha)^2(q^2 + \varkappa^2) + (Z\alpha)^4} \\
 & \cdot \frac{l}{l+1} \left\{ \frac{1}{k} \frac{p^2 \sin^2 \Theta}{(E - p \cos \Theta)^2} \left[ E + 1 - 2\lambda p \sigma_k + \lambda^2 \frac{2l+1}{l} (E-1) \right] \right. \\
 & + \frac{1}{(E - p \cos \Theta)^2} \left[ -1 + 2\lambda \sigma_p - \lambda^2 \frac{2l+1}{l} \right] + \frac{1}{E - p \cos \Theta} \left[ 2E - 1 - k \right. \\
 & \left. \left. + 2\lambda \{ (E^2 - E + k) \sigma_p - p \sigma_k \} + \lambda^2 \{ 2p^2 - 2k - 2Ep \cos \Theta + \frac{2l+1}{l} (2E + 1 + k) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{l-1}{l} k \left( \frac{p}{q} \right)^2 (1 - E - k) \sin^2 \Theta \} \right] \right\} \\
 & + (1+k)(E + p \cos \Theta) - 1 - 2\lambda \{ E(1+k) \sigma_p + p k \sigma_k \} + \lambda^2 \{ (1+k) \left[ 2p \cos \Theta + \frac{l-1}{l} k \left( \frac{p}{q} \right)^2 \sin^2 \Theta \right] \\
 & \left. + \frac{2l+1}{l} [(1+k)(E - p \cos \Theta) - (2E+1)] \right\} \sin \Theta d\Theta dk. \quad (24)
 \end{aligned}$$

In (24) verwendeten wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\varkappa}{q}, \quad \sigma_p = \left[ 1 - \left( \frac{p}{q} \right)^2 \sin^2 \Theta \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 \sigma_k &= \left[ 1 - \left( \frac{k}{q} \right)^2 \sin^2 \Theta \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

In Gl. (23) und (24) bedeutet  $d\Phi$  die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Prozesses pro Kernzerfall mit der Umwandlungsenergie  $\varkappa$ .

Der Grenzübergang  $k \rightarrow 0$  führt wegen  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$  auf (2), wobei für magnetische Übergänge

$$w = \alpha (Z\alpha)^3 \frac{1}{\varkappa} \left( \frac{\varkappa + 2}{\varkappa} \right)^{l+\frac{1}{2}}$$

und für elektrische Übergänge

$$w = \alpha (Z\alpha)^3 \frac{1}{\varkappa^3} \left( \frac{\varkappa + 2}{\varkappa} \right)^{l-\frac{1}{2}} \left( \frac{4l}{l+1} + \varkappa^2 \right).$$

Hier bedeutet  $w$  die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines der beiden K-Elektronen dividiert durch die Wahrscheinlichkeit eines Kernzerfalls. Diese Konversionskoeffizienten sind auch von Dancoff und Morrison<sup>7</sup> angegeben worden.

Die in den allgemeinen Formeln (23) und (24) auftretenden Nenner  $(q^2 - \varkappa^2)^2 + 2(Z\alpha)^2(q^2 + \varkappa^2) + (Z\alpha)^4$  geben bei kleinen Kernladungszahlen zu charakteristischen Maxima der Übergangswahrscheinlichkeit Anlaß, die in der Nähe solcher Wertepaare von  $\Theta$  und  $k$  liegen, für die  $q^2 - \varkappa^2 = 0$  ist. Um die entsprechende Abhängigkeit der Winkel  $\Theta$  von der Lichtquantenenergie  $k$  festzustellen, verwendet man  $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{k}$  und  $p^2 = (1 + \varkappa - k)^2 - 1$  und erhält

<sup>7</sup> S. M. Dancoff u. P. Morrison, Phys. Rev. 55, 122 [1939].

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (q^2 - \varkappa^2) &= (1 - k)(\varkappa - k) + k[(\varkappa - k)^2 \\
 &+ 2(\varkappa - k)]^{\frac{1}{2}} \cos \Theta.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} (q^2 - \varkappa^2) \begin{cases} < 0 \text{ für } k > 1, \quad \Theta > \pi/2; \\ > 0 \text{ für } k < 1, \quad \Theta < \pi/2. \end{cases}$$

Die Kurve  $q^2 - \varkappa^2 = 0$  liegt daher stets in den zwei Bereichen  $0 < k < 1$ ,  $\pi/2 < \Theta < \pi$  und  $1 < k < \varkappa$ ,  $0 < \Theta < \pi/2$ . Für  $q^2 - \varkappa^2 = 0$  ergibt sich

$$\cos \Theta = \left( 1 - \frac{1}{k} \right) (\varkappa - k) [(\varkappa - k)^2 + 2(\varkappa - k)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Diese Funktion gibt über die Lage der Maxima der Winkel- und Energieverteilung der Lichtquanten Aufschluß. In Abb. 1 ist die Kurve  $q^2 - \varkappa^2 = 0$  für die Umwandlungsenergie  $\varkappa = 4$  dargestellt. Dieser Kurve entsprechend findet man in Abb. 2 unter der Annahme  $Z\alpha = 0,1$  für die Winkelverteilung von Lichtquanten mit der Energie  $k = 1$  bei magnetischen Übergängen der Ordnung  $l = 1, 3$  und  $5$  Maxima in der Nähe von  $\Theta = 90^\circ$ . Die Kurven sind willkürlich auf  $\Theta_0 = 75^\circ$  bezogen. Die Energieverteilung der Lichtquanten, die mit der Bewegungsrichtung der Elektronen einen Winkel  $\Theta = 90^\circ$  einschließen, ist der Abb. 3 zu entnehmen. Diese Kurven, die willkürlich auf die Energie  $k_0 = 1, 2$  bezogen sind, gelten ebenfalls für magnetische Übergänge.

Eine quantitative Übereinstimmung der aus unserer Näherung folgenden Winkelverteilung mit den experimentellen Ergebnissen von Brown und Stump<sup>3</sup> ist nicht zu erwarten, da bei diesen Messungen Barium mit  $Z/137 = 0,4$  verwendet wurde,

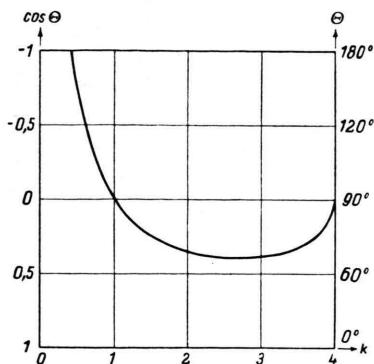


Abb. 1. Die Kurve  $q^2 - x^2 = 0$  für  $z=4$ . Unabhängig von der speziellen Wahl von  $x$  geht die Kurve stets durch die Bereiche  $0 < k < 1$ ,  $\pi/2 < \Theta < \pi$  und  $1 < k < x$ ,  $0 < \Theta < \pi/2$ .

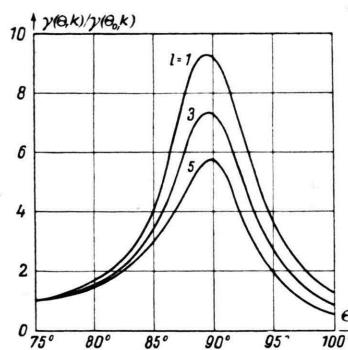


Abb. 2. Die aus  $d\Phi = \gamma(\Theta, k) \sin \Theta d\Theta \Omega dk$  folgende Winkelverteilung der Lichtquanten  $\gamma(\Theta, k) / \gamma(\Theta_0, k)$  für die speziellen Werte  $z=4$ ,  $\Theta_0 = 75^\circ$ ,  $k=1$  und  $Z/137 = 0,1$  bei magnetischen Übergängen der Ordnung  $l=1$ , 3 und 5.

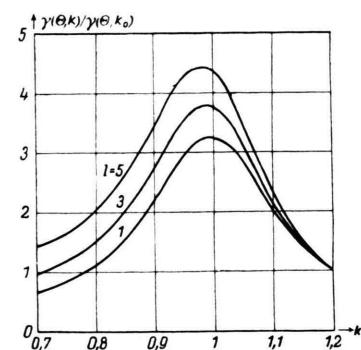


Abb. 3. Die aus  $d\Phi = \gamma(\Theta, k) \sin \Theta d\Theta \Omega dk$  folgende Energieverteilung der Lichtquanten  $\gamma(\Theta, k) / \gamma(\Theta_0, k)$  für die speziellen Werte  $z=4$ ,  $\Theta = 90^\circ$ ,  $k_0 = 1,2$  und  $Z/137 = 0,1$  bei magnetischen Übergängen der Ordnung  $l=1$ , 3 und 5.

wobei die Energie der Lichtquanten etwa zwischen 0,1 und 0,4 lag. In diesem Fall besitzt der Impuls der gebundenen Elektronen im Anfangszustand die gleiche Größenordnung wie jener der beobachteten

Lichtquanten. Eine experimentelle Prüfung der vorliegenden Berechnungen würde sowohl eine kleinere Kernladungszahl, als auch die Beobachtung energiereicherer Lichtquanten erfordern.

## Über den Einfluß spezieller Gitterstörungen auf die elektrischen Eigenschaften von Germanium\*

Von K. BLANK, D. GEIST und K. SEILER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart und dem Standard-Laboratorium der Südd. Apparatefabrik Nürnberg

(Z. Naturforschg. 9a, 515—520 [1954]; eingegangen am 17. März 1954)

Unter *reinen* Bedingungen geglühtes bzw. geglühtes und verformtes Germanium zeigt nach dem Abschrecken keine Änderung seiner elektrischen Leitfähigkeit. Die Trägerlebensdauer wird zwar nicht durch Glühen, jedoch durch zusätzliche Verformung drastisch herabgesetzt.

Germaniumeinkristalle, die geringe Mengen gewisser Fremdstoffe wie z. B. Indium oder Arsen enthalten, weichen in ihren elektrischen Eigenschaften in charakteristischer Weise von reinen Kristallen ab. Faßt man die ins Germaniumgitter eingebauten Fremdstoffe als Gitterstörungen auf, so wird man zu der Frage geführt, ob andersartige Gitterstörungen, z. B. einzelne fehlgeordnete Germaniumatome, die elektrischen Eigenschaften von Germanium ebenfalls beeinflussen und in welcher

Weise. Das wesentliche Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen ist, daß fast alle Effekte, die zunächst Gitterstörungen des reinen Germaniums zugeschrieben wurden, in Wirklichkeit auf den Einfluß von Fremdstoffen zurückgehen.

### § 1. Die Beziehungen zwischen Gitterstörungen, elektrischer Leitfähigkeit und Trägerlebensdauer

Als Gitterstörungen ziehen wir hier einzelne fehlgeordnete Atome, Versetzungen und eingebaute Fremdatome in Betracht. Diese Aufzählung ist unvollständig, aber für uns als Ausgangspunkt ver-

\* Vortrag auf der Physikertagung Bad Dürkheim, April 1953 (ausgenommen Abschnitt 2 B und 2 D).